

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2011

CONVOCATORIA: JUNIO 2011

MATEMÀTIQUES II

MATEMÁTICAS II

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

## OPCIÓ A

**Problema A.1.** Siga el sistema d'equacions

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m + 1 \\ x + 3y + (m - 2)z = m - 1 \end{cases},$$

on  $m$  és un paràmetre real. Obtingueu **raonadament**:

- Totes les solucions del sistema  $S$  quan  $m = 2$ . (4 punts).
- Tots els valors de  $m$  per als quals el sistema  $S$  té una solució única. (2 punts).
- El valor de  $m$  per al qual el sistema  $S$  admet la solució  $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ . (4 punts).

**Problema A.2.** En l'espai es donen les rectes  $r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$  i  $s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ . Obtingueu

**raonadament:**

- Un punt i un vector director de cada recta. (3 punts).
- La posició relativa de les rectes  $r$  i  $s$ . (4 punts).
- L'equació del pla que conté a  $r$  i és paral·lel a  $s$ . (3 punts).

**Problema A.3.** Siga  $f$  la funció definida per  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ . Obtingueu **raonadament**:

- El domini i les asímptotes de la funció  $f(x)$ . (3 punts).
- Els intervals de creixement i decreixement de la funció  $f(x)$ . (4 punts).
- La integral  $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$ . (3 punts).

## OPCIÓ B

**Problema B.1.** Es dona la matriu  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$ , on  $m$  és un paràmetre real.

- Obtingueu **raonadament** el rang o característica de la matriu  $A$  en funció dels valors de  $m$ . (5 punts).
- Expliqueu** per què és invertible la matriu  $A$  quan  $m = 1$ . (2 punts).
- Obtingueu **raonadament** la matriu inversa  $A^{-1}$  de  $A$  quan  $m = 1$ , i indiqueu els distints passos per a l'obtenció de  $A^{-1}$ . **Comproveu** que els productes  $AA^{-1}$  i  $A^{-1}A$  donen la matriu unitat. (3 punts).

**Problema B.2.** En l'espai es donen les rectes  $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 \\ z = 3 \end{cases}$  i  $s : \{ x - 1 = y = z - 3 \}$ . Obtingueu **raonadament**:

- Un vector director de cada una de dites rectes  $r$  i  $s$ . (2 punts).
- L'equació del pla perpendicular a la recta  $r$  que passa pel punt  $(0, 1, 3)$ . (3 punts).
- El punt d'intersecció de les rectes  $r$  i  $s$  (2 punts) i l'equació del pla  $\mathbf{p}$  que conté aquestes rectes  $r$  i  $s$ . (3 punts).

**Problema B.3.** Es desitja construir un camp rectangular amb vèrtexs  $A, B, C$  i  $D$  de manera que:

Els vèrtexs  $A$  i  $B$  siguin punts de l'arc de la paràbola  $y = 4 - x^2$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ , i el segment d'extremes  $A$  i  $B$  és horitzontal.

Els vèrtexs  $C$  i  $D$  siguin punts de l'arc de la paràbola  $y = x^2 - 16$ ,  $-4 \leq x \leq 4$ , i el segment d'extremes  $C$  i  $D$  és també horitzontal.

Els punts  $A$  i  $C$  han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real positiu  $x$ .

Els punts  $B$  i  $D$  han de tindre la mateixa abscissa, el valor de la qual és el nombre real negatiu  $-x$ .

Es demana obtenir **raonadament**:

- L'expressió  $S(x)$  de l'àrea del camp rectangular en funció del nombre real positiu  $x$ . (4 punts).
- El nombre real positiu  $x$  per al qual l'àrea  $S(x)$  és màxima. (4 punts).
- El valor de l'àrea màxima. (2 punts).

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'usa o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

## OPCIÓN A

**Problema A.1.** Sea el sistema de ecuaciones

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m + 1 \\ x + 3y + (m - 2)z = m - 1 \end{cases},$$

donde  $m$  es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

- Todas las soluciones del sistema  $S$  cuando  $m = 2$ . (4 puntos).
- Todos los valores de  $m$  para los que el sistema  $S$  tiene una solución única. (2 puntos).
- El valor de  $m$  para el que el sistema  $S$  admite la solución  $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ . (4 puntos).

**Problema A.2.** En el espacio se dan las rectas  $r: \begin{cases} x + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$ . Obtener

**razonadamente**:

- Un punto y un vector director de cada recta. (3 puntos).
- La posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ . (4 puntos).
- La ecuación del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ . (3 puntos).

**Problema A.3.** Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ . Obtener **razonadamente**:

- El dominio y las asíntotas de la función  $f(x)$ . (3 puntos).
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x)$ . (4 puntos).
- La integral  $\int f(x)dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$ . (3 puntos).

## OPCIÓN B

**Problema B.1.** Se da la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$ , donde  $m$  es un parámetro real.

- Obtener **razonadamente** el rango o característica de la matriz  $A$  en función de los valores de  $m$ . (5 puntos).
- Explicar** por qué es invertible la matriz  $A$  cuando  $m = 1$ . (2 puntos).
- Obtener **razonadamente** la matriz inversa  $A^{-1}$  de  $A$  cuando  $m = 1$ , indicando los distintos pasos para la obtención de  $A^{-1}$ . **Comprobar** que los productos  $AA^{-1}$  y  $A^{-1}A$  dan la matriz unidad. (3 puntos).

**Problema B.2.** En el espacio se dan las rectas  $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 \\ z = 3 \end{cases}$  y  $s : \{ x - 1 = y = z - 3$ . Obtener **razonadamente**:

- Un vector director de cada una de dichas rectas  $r$  y  $s$ . (2 puntos).
- La ecuación del plano perpendicular a la recta  $r$  que pasa por el punto  $(0, 1, 3)$ . (3 puntos).
- El punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$  (2 puntos) y la ecuación del plano  $\mathbf{p}$  que contiene a estas rectas  $r$  y  $s$ . (3 puntos).

**Problema B.3.** Se desea construir un campo rectangular con vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de manera que:

Los vértices  $A$  y  $B$  sean puntos del arco de la parábola  $y = 4 - x^2$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ , y el segmento de extremos  $A$  y  $B$  es horizontal.

Los vértices  $C$  y  $D$  sean puntos del arco de la parábola  $y = x^2 - 16$ ,  $-4 \leq x \leq 4$ , y el segmento de extremos  $C$  y  $D$  es también horizontal.

Los puntos  $A$  y  $C$  deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo  $x$ .

Los puntos  $B$  y  $D$  deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo  $-x$ .

Se pide obtener **razonadamente**:

- La expresión  $S(x)$  del área del campo rectangular en función del número real positivo  $x$ . (4 puntos).
- El número real positivo  $x$  para el que el área  $S(x)$  es máxima. (4 puntos).
- El valor del área máxima. (2 puntos).